第43卷 第4期
2015年8月

江汉大学学报（自然科学版）
J. Jianghan Univ.（Nat. Sci. Ed.）

Vol.43 No.4
Aug. 2015

一个包含 Smarandache Ceil 函数的对偶函数的方程

高　丽，马娅锋
（延安大学　数学与计算机科学学院，陕西　延安　716000）

摘　要：利用初等方法研究了一个包含 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 的对偶函数 $\overline{S_k}(n)$，给出了当 $k=6$ 时方程 $\overline{S_6}(1)+\overline{S_6}(2)+\cdots+\overline{S_6}(n)=6\Omega(n)$ 的具体正整数解。

关键词：$S_k(n)$ 函数；对偶函数 $\overline{S_k}(n)$；正整数解
中图分类号：O156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-0143（2015）04-0300-03
DOI：10.16389/j.cnki.cn42-1737/n.2015.04.003

An Equation Involving the Smarandache Ceil Dual Function

GAO Li，MA Yafeng
（School of Mathmatics and Computer Science，Yan´an University，Yan´an 716000，Shanxi，China）

Abstract：The elementary method are usd to study the dual function $\overline{S_k}(n)$ involving Smarandache Ceil function $S_k(n)$，all specific positive integer solution of equation $\overline{S_6}(1)+\overline{S_6}(2)+\cdots+\overline{S_6}(n)=6\Omega(n)$ are given with $k=6$.

Keywords：Smarandache Ceil function $S_k(n)$；dual function $\overline{S_k}(n)$；positive integer solution

0　引言

著名的Smarandache Ceil函数[1-3]及其对偶函数的定义如下：

定义1[4]　对任意的正整数 n，k 阶Smarandache Ceil函数为

$$S_k(n)=\min\{x:\in \mathbf{N}: n\mid x^k\}。$$

定义2[4]　对任意的正整数 n，k 阶Smarandache Ceil函数的对偶函数为

$$\overline{S_k}(n)=\max\{x:\in \mathbf{N}: x^k\mid n\}。$$

其中 $\mathbf{N}$ 是正整数集。

关于Smarandache Ceil函数的研究许多学者给出了一系列重要的结论。呼家源等在文献[5]中研究了一个包含Smarandache Ceil函数 $S_k(n)$ 对偶函数及欧拉函数的方程 $S_k(n)=\phi(n)$ 的正整数解，并给出了具体解；苟素在文献[6]中研究了方程 $S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)=S_k(1+2+\cdots+n)$ 有解当且仅当 $n=1，2，3$；朱敏慧在文献[7]中研究了方程 $S_2(n)=\phi(n)$；冯强等在文献[8]中研究了 k 阶Smarandache Ceil函数及其对偶函数均值的性质；赵杏花等在文献[9]中研究了方程 $S_k(n)+Z_w(n)=2n$ 和 $Z(n)=S_2(n)$ 的可解性，并给出了它们所有解的具体形式；赵娜娜在文献[10]中研究了Smarandache Cei函数对偶函数 $\overline{S_k}(n)$ 的方程

收稿日期：2015－04－09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11471007）；陕西省科学技术研究发展计划项目（2013JQ1019）；延安大学校级科研计划项目（YD2014-05）
作者简介：高　丽（1966—），女，教授，硕士，研究方向：数论和解析函数。

$\overline{S}_5(1)+\overline{S}_5(2)+\cdots+\overline{S}_5(n)=5\Omega(n)$ 的正整数解。

在前人的研究基础上本文研究了一个包含Smarandache Ceil 函数的对偶函数 $S(n)$ 和素因子函数 $\Omega(n)$ 的方程

$$\overline{S}_k(1)+\overline{S}_k(2)+\cdots+\overline{S}_k(n)=k\Omega(n),$$

其中 $\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因子的个数。

若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$,给出了 $k=6$ 时的所有正整数解。

1　引理及证明

引理　对任意正整数 $n\geqslant 64$,有不等式

$$\overline{S}_6(1)+\overline{S}_6(2)+\cdots+\overline{S}_6(n)>6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k) \tag{1}$$

成立,其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$。

证明　对任意正整数 $n\geqslant 64$,由 $\overline{S}_k(n)$ 的定义可知 $\overline{S}_6(n)\geqslant 1$,且 $\overline{S}_6(64)=2$,故不等式 $\overline{S}_6(1)+\overline{S}_6(2)+\cdots+\overline{S}_6(n)>n$ 恒成立,不等式(1)等价于

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}>6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)。$$

具体分以下情况:

1)当 $k=1$ 时,则 $n=p_1^{\alpha_1}$。

ⅰ)若 $p_1=2$,当 $\alpha_1\geqslant 6$ 时,$2^6>6\times 6=36$,即 $2^{\alpha_1}>6\alpha_1$;

ⅱ)若 $p_1=3$,当 $\alpha_1\geqslant 3$ 时,即 $3^{\alpha_1}>6\alpha_1$;

ⅲ)若 $p_1=5$,当 $\alpha_1\geqslant 2$ 时,即 $5^{\alpha_1}>6\alpha_1$;

ⅳ)若 $p_1\geqslant 7$,当 $\alpha_1\geqslant 1$ 时,即 $p_1^{\alpha_1}>6\alpha_1$。

2)假定对于 $k\geqslant 2$ 时不等式成立,下证对 $k+1$ 时等式也成立,即

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}>6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)p_{k+1}^{\alpha_{k+1}},$$

由 $p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}>\alpha_{k+1}+1$ 可得到

$$6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}>6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)(\alpha_{k+1}+1)。$$

又因为

$$6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)(\alpha_{k+1}+1)-6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})=$$
$$6\alpha_{k+1}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k-1)>0。$$

即(1)式得证。

2　定理及证明

定理　对任意正整数 n,包含6阶Smarandache Ceil 函数方程的

$$\overline{S}_6(1)+\overline{S}_6(2)+\cdots+\overline{S}_6(n)=6\Omega(n) \tag{2}$$

有解当且仅当 $n=18$,24。

证明　1)当 $n\geqslant 64$ 时,由引理知 $\overline{S}_6(1)+\overline{S}_6(2)+\cdots+\overline{S}_6(n)=6\Omega(n)$ 无正整数解。

2)当 $n<64$ 时,易知 $\overline{S}_5(i)=1(i<32)$,则

ⅰ)当 $n=1$ 时,$\Omega(1)=0$;

ⅱ)当 n 为小于64的素数时,$\Omega(n)=1$;

ⅲ)当 $n=4,6,9,10,14,15,21,22,25,26,33,34,35,38,39,46,49,51,55,57,58,62,63$ 时,$\Omega(n)=2$;

ⅳ)当 $n=8,12,18,20,27,28,30,42,44,45,50,52$ 时,$\Omega(n)=3$;

v）当 $n = 32, 48$ 时，$\Omega(n) = 5$。

因此有

$$\overline{S}_6(1) + \overline{S}_6(2) + \cdots + \overline{S}_6(18) = 6\Omega(18),$$
$$\overline{S}_6(1) + \overline{S}_6(2) + \cdots + \overline{S}_6(24) = 6\Omega(24)。$$

定理得证。

参考文献（References）

［1］ 潘承洞，潘承彪. 初等数论［M］. 北京：北京大学出版社，1992.
［2］ 张文鹏. 初等数论［M］. 西安：陕西师范大学出版社，2007.
［3］ SMARANDACHE F. Olny problems，not solutions［M］. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.
［4］ 马金萍. 数论函数和数列的性质研究［M］. 北京：科学出版社，2012：14-15.
［5］ 呼家源，秦伟. 一个包含Smarandache Ceil 函数的对偶函数及Euler函数的方程及其可解性［J］. 西北大学学报：自然科学版，2013，43（3）：364-366.
［6］ 苟素. 关于Smarandache Ceil 函数的一个方程［J］. 纯粹数学与应用数学，2006，22（1）：48-50.
［7］ 朱敏慧. 一个包含Euler函数及 k 阶Smarandache Ceil 函数的方程及其正整数解［J］. 纯粹数学与应用数学，2009，25（2）：411-416.
［8］ 冯强，郭金宝. 关于Smarandache Ceil 函数及其对偶函数的均值［J］. 西南民族大学学报：自然科学版，2007，33（4）：713-717.
［9］ 赵杏花，郭金宝，穆秀梅，等. 两个关于 k 阶Smarandache Ceil 函数的方程［J］. 陕西理工学院学报：自然科学版，2011，27（4）：74-76.
［10］ 赵娜娜. 有关Smarandache函数方程可解性研究及均值估计［D］. 西安：西北大学，2014.

（责任编辑：胡燕梅）

（上接第299页）

参考文献（References）

［1］ MACDONALD I G. Symmetric functions and hall polynomials［M］. New York：Oxford University Press，1995：169-171.
［2］ SAGAN B E. The symmetric group［M］. 2nd ed. New York：Springer，1998：1-3.
［3］ HU X L，JING N H. Spin characters of generalized symmetric group［J］. Monatshefte für Mathematik，2014，173（4）：495-518.
［4］ 胡晓莉. 圈积群的投射特征［D］. 广州：华南理工大学，2012.

（责任编辑：胡燕梅）